

УДК 539.4

Нелокальные критерии разрушения. Критерий конечной трещины

С.В. Сукнёв

Институт горного дела Севера им. Н.В. Черского СО РАН, Якутск, Россия
suknyov@igds.ysn.ru

Аннотация. Рассмотрены особенности применения нелокального критерия, основанного на концепции механики конечных трещин, в задаче о прочности твёрдого тела, содержащего концентратор напряжений, при растяжении и сжатии. Этот критерий относится к категории энергетических методов. Подход механики конечных трещин заключается в модификации уравнения энергетического баланса путём использования конечной величины приращения длины трещины вместо бесконечно малого приращения, используемого при вычислении интенсивности высвобождающейся упругой энергии в рамках линейной механики разрушения. Такая модификация линейной механики разрушения позволяет предсказывать наступление предельного состояния (разрушение) в случаях с тупыми вырезами, когда обычная механика разрушения неприменима. Показаны преимущества и ограничения использования критерия конечной трещины. Получены выражения для разрушающего напряжения при растяжении и при сжатии пластины с круговым отверстием. Проведено сравнение результатов расчёта прочности пластин с круговым отверстием по критерию конечной трещины с известными экспериментальными данными, полученными при растяжении композитных пластин, а также с данными эксперимента, проведённого на гипсовых плитах при сжатии. Показано, что для некоторых материалов критерий конечной трещины может быть успешно использован для описания влияния размера отверстия на начало разрушения у контура отверстия, и для оценки критического размера дефекта при сжатии, наряду с другими нелокальными критериями (критерий средних напряжений, критерий напряжений в точке, критерий фиктивной трещины). Однако его применение для других материалов позволяет получить лишь качественные оценки разрушающего напряжения.

Ключевые слова: твёрдое тело, трещина, концентрация напряжений, разрушение, нелокальные критерии.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-05-00323).

Nonlocal fracture criteria. Finite fracture criterion

S.V. Suknev

Chersky Institute of Mining of the North, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Yakutsk, Russia
suknyov@igds.ysn.ru

Abstract. The paper considers some specific features of application of nonlocal criterion, based on the concept of finite fracture mechanics, in the strength problem of a solid body containing a stress raiser under tension or compression. The criterion is pertained to energy-based methods. The approach of finite fracture mechanics consists in modification of the traditional energy balance as used in linear elastic fracture mechanics (LEFM). The modification involves the using of a finite amount of crack extension instead of an infinitesimal extension when calculating the energy release rate in LEFM. This makes LEFM to be suitable for predictions in situations of blunt notches in which it is normally invalid. Advantages and restrictions of the using of the finite fracture criterion are shown. The expressions for the failure stress in the problems of tension or compression of the plate with a circumferential hole are obtained. The reductions in strength of the plates with a circumferential hole predicted by the finite fracture criterion are compared with known experimental data on composite plates in tension, and own experimental data on gypsum plates in compression. In reference to some materials, the finite fracture criterion similar to other non-local criteria

(the criteria of average stress, point stress, and fictitious crack) can be successfully applied to describe the hole-size effect on tensile fracture initiation and assess the critical size of the flaw under compression. However, its application to other materials allows us to obtain only a qualitative assessment of the failure stress.

Key words: solid body, crack, stress concentration, fracture, nonlocal criteria.

Acknowledgments: this work was carried out with financial support of the Russian Federal Property Fund (RFPF) project No. 18-05-00323.

Введение

В работах [1–3] были рассмотрены возможности применения традиционных критериев, критериев механики разрушения, а также некоторых нелокальных критериев в задаче о прочности твёрдого тела, содержащего концентратор напряжений. Показано, что при проведении расчётов на прочность конструкций и сооружений из таких структурно-неоднородных материалов, как горные породы, высокопрочные металлические сплавы, композиты, бетон, чугун, механические и прочностные свойства которых подвержены сильному влиянию масштабного фактора, область применения традиционного подхода ограничена невысокими значениями коэффициента концентрации напряжений K_t , характеризующего отношение эквивалентного напряжения σ_e в наиболее напряжённой точке тела к приложенному напряжению σ . Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_e < \sigma_0. \quad (1)$$

Эквивалентное напряжение σ_e характеризует внутреннее напряжённое состояние тела, предельное напряжение σ_0 характеризует стандартные механические свойства тела и полагается константой материала. Наступлению предельного состояния (разрушению) соответствует знак равенства в выражении (1), а критическое напряжение σ_c , при котором в наиболее напряжённой точке тела достигается предельное состояние, определяется выражением

$$\sigma_c = \frac{\sigma_0}{K_t} \quad (2)$$

При очень высоких значениях коэффициента концентрации напряжений используют подход линейной механики разрушения, в соответствии с которым предельное состояние оценивают на основе анализа распределения напряжений вблизи вершины концентратора напряжений (трещины). В качестве меры напряжённого состояния рассматривают не зависящий от координат коэффициент (коэффициент интенсивности напряжений) при сингулярном члене разложения напряжений в ряд по степеням r (r – радиус, исходящий из вершины трещины). Наступление предельного состояния (рост трещины) связывают с достижением коэффициен-

том интенсивности напряжений критического значения. Условие прочности записывают в виде

$$K < K_c, \quad (3)$$

где K – коэффициент интенсивности напряжений; K_c – его критическое значение, характеризующее локальные свойства материала. Данный подход получил широкое распространение. Однако область его применения ограничена очень острыми концентраторами, когда характер распределения напряжений позволяет отнести их к концентраторам типа трещин.

Указанные ограничения приводят к тому, что подходы классической механики и механики разрушения имеют различные области практического применения. Первый подход используется при проектировании конструкции, когда ставится задача оптимизации её формы с целью максимально возможного снижения концентрации напряжений, а второй подход используется на стадии эксплуатации конструкции, когда ставится задача оценки её остаточного ресурса с учётом влияния имеющихся в конструкции дефектов, наибольшую опасность из которых представляют дефекты типа трещин. Проблема состоит в том, что большая часть конструктивных, технологических и эксплуатационных дефектов и концентраторов напряжений, имеющих высокое, но конечное значение коэффициента концентрации, оказывается вне области применения этих подходов. Поэтому актуальной является задача разработки новых подходов к расчётам конструкций на прочность, позволяющих охватить весь спектр концентраторов напряжений и с единых позиций подходить к расчёту конструкций с тупым концентратором напряжений и с трещиной.

В настоящее время интенсивно разрабатываются так называемые нелокальные критерии разрушения, в том числе, критерии средних напряжений (ASC) и напряжений в точке (PSC), рассмотренные в работах [1, 2]. Общим свойством нелокальных критериев является введение внутреннего размера материала, характеризующего его структуру, что позволяет описать масштабный эффект в условиях концентрации напряжений и тем самым расширить область применения по сравнению с традиционными

критериями. Применение критериев ASC и PSC аналогично применению традиционных критериев с той разницей, что в расчёт левой части критерия помимо компонент тензора напряжений также входит структурный параметр размерности длины. Вычисленная таким образом величина эквивалентного напряжения приравнивается к прочностной характеристике материала, которая полагается константой. В зарубежной литературе такой подход к расчётам на прочность называют методом напряжений (stress-based methods).

Другой подход в разработке нелокальных критериев разрушения основан на применении методов механики разрушения. Для трещины в твёрдом теле составляется энергетический баланс при её виртуальном приращении на малую величину и записывается условие роста трещины, которое и является критерием разрушения. Такие методы расчёта на прочность в зарубежной литературе называют энергетическими (energy-based methods). Для того чтобы критерий линейной (упругой) механики разрушения применить к описанию разрушения у гладкого выреза поступают следующим образом. Предполагают, что в вершине выреза в зоне концентрации напряжений изначально существует воображаемая (фиктивная) трещина, длина которой является константой материала, характеризующей его структуру. Для трещины, находящейся в неоднородном поле напряжений, рассчитывают коэффициент интенсивности напряжений и применяют критерий (3). Длина фиктивной трещины и критический коэффициент интенсивности напряжений связаны предельным соотношением на прочность гладкого (без выреза) образца. Преимущества и ограничения применения критерия фиктивной трещины (FCC) рассмотрены в работе [3].

В настоящей работе рассматриваются особенности использования недавно предложенного [4–6] критерия, относящегося к категории энергетических методов. Критерий основан на концепции механики конечных трещин (finite fracture mechanics), получившей в последнее время широкое распространение [7–12].

Критерий конечной трещины. В этом критерии постулируется, что рост трещины, включая момент её возникновения у выреза, происходит скачкообразно. Разрушение происходит, если энергия, высвобождаемая при скачкообразном изменении длины трещины, достигнет критического значения. Конечный размер приращения длины трещины рассматривается в качестве константы материала.

В отсутствие работы внешних сил уравнение энергетического баланса для тела, содержащего

трещину, в вариационной форме имеет вид:

$$\delta W + G_c \delta S = 0, \quad (4)$$

где δW – изменение потенциальной энергии деформации упругого тела вследствие релаксации напряжений, связанной с появлением новых, свободных от нагрузок поверхностей тела; G_c – энергия разрушения на единицу поверхности трещины, которая является константой материала (вязкость разрушения); δS – приращение поверхности трещины. Второе слагаемое в выражении (4) представляет собой величину энергии, требуемой для образования новой поверхности разрыва площадью δS . Если трещина растёт непрерывно, то уравнение (4) справедливо для любых сколь угодно малых приращений δS . Рассматривая предел $\delta S \rightarrow 0$, получим обычное условие стагнации трещины в дифференциальной форме:

$$-\frac{\partial W}{\partial S} = G = G_c, \quad (5)$$

где G – интенсивность высвобождающейся упругой энергии при приращении трещины.

В механике конечных трещин постулируется, что приращение длины трещины происходит на конечную величину $\delta l = d = \text{const}$. Для тела единичной толщины, содержащего сквозную трещину длиной l , запишем:

$$-\delta W = - \int_l^{l+d} dW = \int_l^{l+d} \left(-\frac{\partial W}{\partial l} \right) dl = \int_l^{l+d} G dl. \quad (6)$$

Из уравнения (4) с учётом (6) получим условие разрушения:

$$\int_l^{l+d} G dl = G_c d. \quad (7)$$

Принимая во внимание, что $G \sim K^2$, условие разрушения (7) можно также записать в виде

$$\int_l^{l+d} K^2 dl = K_c^2 d. \quad (8)$$

Важным преимуществом инкрементальных условий разрушения (7) и (8) перед дифференциальными условиями (5) и (3) является то, что они могут быть применены не только в качестве условий роста уже существующих в теле трещин, но и для предсказания появления трещин у концентраторов напряжений в теле, не содержащем начальных трещин. Для этого в уравнениях (7) и (8) достаточно принять $l = 0$. При этом не требуется делать никаких дополнительных допущений о существовании в теле неких

фиктивных или воображаемых трещин, представление о которых лежит в основе критерия FCS и, как было показано в работе [3], приводит к определённым физическим противоречиям. По сравнению с другими нелокальными критериями разрушения, рассмотренными в работах [1–3], критерий конечной трещины, который будем обозначать FFC (finite fracture criterion), имеет наиболее ясное физическое содержание. Он основан на разумных представлениях о процессах возникновения и распространения разрушения в хрупких материалах, подтверждаемых многочисленными наблюдениями, и не требует привлечения допущений умозрительного характера о существовании зоны предразрушения и перераспределении упругих напряжений в ней.

Рассмотрим применение критерия конечной трещины в задаче о прочности неограниченной пластины, ослабленной круговым отверстием и подверженной одноосному растяжению или сжатию.

Растяжение пластины с круговым отверстием. Чтобы воспользоваться критерием разрушения (8) необходимо сначала решить соответствующую задачу механики деформируемого твёрдого тела и найти зависимость коэффициента интенсивности напряжений от длины трещины, исходящей от выреза. Во многих случаях такие решения уже существуют. Для рассматриваемой задачи воспользуемся решением, приведённым в работе [3]:

$$K = \sigma \sqrt{\frac{\pi d}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{l}{a} \right)^{-3/2} + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{l}{a} \right)^{-7/2} \left(1 + \frac{l}{2a} + \frac{l^2}{8a^2} \right) \right) \quad (9)$$

где a – радиус отверстия. Подставим выражение (9) в левую часть уравнения (8) и выполним интегрирование в пределах $[0, d]$:

$$\int_0^d K^2 dl = \pi J_1 \left(\frac{a\sigma}{32} \right)^2, \quad (10)$$

где

$$J_1 = -1533 - 512\gamma + 256\gamma^2 + 1408\gamma^{0,5} + 640\gamma^{-0,5} - 384\gamma^{-1,5} + 384\gamma^{-2,5} - 242\gamma^{-1} - 11\gamma^{-2} - 156\gamma^{-3} + 93\gamma^{-4} - 18\gamma^{-5} + 75\gamma^{-6}, \\ \gamma = 1 + d/a.$$

В классическом пределе $l/a \rightarrow 0$ интегрирование даёт следующий результат:

$$\int_0^d K^2 dl = \pi \left(\frac{3\sigma d}{2} \right)^2 \text{ при } l/a \rightarrow 0. \quad (11)$$

Подставив результат интегрирования (11) в условие разрушения (8), получим выражение для критического напряжения:

$$\sigma_c = \frac{2K_c}{3\sqrt{\pi d}} \text{ при } l/a \rightarrow 0. \quad (12)$$

С другой стороны, в этом предельном случае критическое напряжение определяется по формуле (2) в соответствии с традиционным критерием разрушения. Решение задачи Кирша о растяжении бесконечной плоскости с круговым отверстием даёт коэффициент концентрации напряжений $K_t = 3$ [13]. Приравняв выражения (2) и (12), получим формулу, связывающую новую константу материала d с прочностными свойствами σ_0 и K_c :

$$d = \frac{4K_c^2}{\pi\sigma_0^2} \square \quad (13)$$

С учётом (10) и (13) из уравнения (8) получим формулу для расчёта критического напряжения при произвольных значениях радиуса отверстия:

$$\sigma_c = \sigma_0 \frac{16d/a}{\sqrt{J_1}}. \quad (14)$$

В отсутствие отверстия ($a = 0$) критическое напряжение ожидаемо равно пределу прочности гладкого образца. В то же время присутствие в пластине любого сколь угодно малого дефекта (отверстия) приводит к снижению её прочности, что не согласуется с современными представлениями о реальном твёрдом теле [14]. Поскольку любой материал обладает изначальной, присущей ему дефектностью, малые искусственные дефекты, размеры которых сопоставимы с размерами структурных составляющих материала, не оказывают влияния на его прочность до тех пор, пока их размеры не достигнут определённого (критического) значения. В рассмотренном выше примере задача определения критического размера дефекта в рамках критерия конечной трещины не может быть поставлена, также как и в рамках нелокальных критериев, рассмотренных ранее [1–3]. При этом следует уточнить, что речь идёт о минимальном критическом размере дефекта, который не зависит от уровня действующих в конструкции напряжений. Задача о допустимых размерах дефекта в реальных

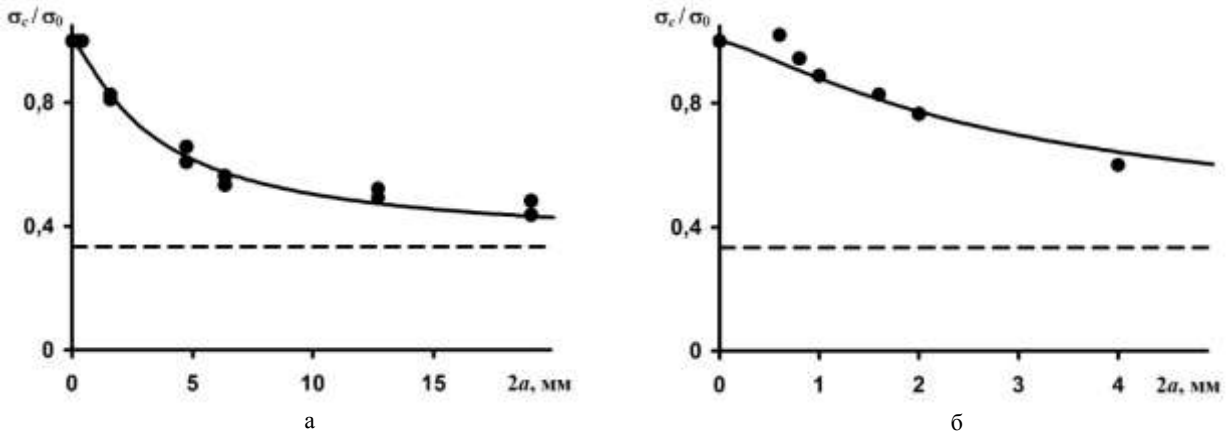


Рис. 1. Зависимость критического напряжения от диаметра отверстия

конструкциях ставится, как правило, с учётом нагруженности конструкции, которая определяется реальными условиями её работы. В этом случае критический размер дефекта зависит от уровня действующих в конструкции напряжений, уменьшаясь по мере их роста.

Проанализируем с позиций критерия конечной трещины известные экспериментальные данные о разрушении пластин с круговыми отверстиями при растяжении. Daniel [15] испытывал пластины с отверстиями из эпоксидного углепластика с квазиизотропной укладкой слоёв. На рис. 1, а представлены экспериментальные данные (точки) и результаты расчёта критического напряжения (сплошная кривая) по формуле (14). Nyakutake, Nagio и Nisitani [16] исследовали прочность пластин с отверстиями, изготовленных из тканого эпоксидного стеклопластика. Материал пластин считали квазиизотропным. На рис. 1, б представлены экспериментальные данные (точки), полученные на пластине шириной 20 мм, и результаты расчёта критического напряжения (сплошная кривая) по формуле (14). Штриховые прямые на рис. 1, а, б рассчитаны согласно традиционному подходу по формуле (2). Приведённые данные демонстрируют значительный масштабный эффект, который (за исключением области малых отверстий) достаточно хорошо описывается критерием конечной трещины. В области малых отверстий критерий даёт заниженные значения критического напряжения, о чём говорилось выше.

Сжатие пластины с круговым отверстием. Рассмотрим разрушение пластины путём образования трещины отрыва на контуре отверстия и дальнейшего распространения вдоль оси сжатия. Коэффициент интенсивности напряжений для такой трещины определяется выражением [3]:

$$K = p \sqrt{\frac{\pi d}{2}} \left(-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{l}{a} \right)^{-3/2} + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{l}{a} \right)^{-7/2} \left(1 + \frac{l}{2a} + \frac{l^2}{8a^2} \right) \right) \quad (15)$$

где p – приложенное сжимающее напряжение (давление), которое принято положительным. Подставим выражение (15) в левую часть уравнения (8) и выполним интегрирование в пределах $[0, d]$:

$$\int_0^d K^2 dl = \pi J_2 \left(\frac{ap}{32} \right)^2, \quad (16)$$

где

$$J_2 = 19 - 50\gamma^{-1} + 85\gamma^{-2} + 36\gamma^{-3} - 147\gamma^{-4} - 18\gamma^{-5} + 75\gamma^{-6}$$

$$\gamma = 1 + d/a.$$

В классическом пределе $l/a \rightarrow 0$ интегрирование даёт следующий результат:

$$\int_0^d K^2 dl = \pi \left(\frac{pd}{2} \right)^2 \text{ при } l/a \rightarrow 0. \quad (17)$$

Подставив результат интегрирования (17) в условие разрушения (8), получим выражение для критического напряжения:

$$p_c = \frac{2K_c}{\sqrt{\pi d}} \text{ при } l/a \rightarrow 0. \quad (18)$$

С другой стороны, в этом предельном случае критическое напряжение определяется по формуле (2) в соответствии с традиционным критерием разрушения. Поскольку при одноосном

сжатии максимальные растягивающие напряжения на контуре отверстия равны по абсолютной величине приложенному давлению, то коэффициент K_t в формуле (2) следует принять равным 1. Приравняв выражения (2) и (18), получим формулу, связывающую новую константу материала d с прочностными свойствами σ_0 и K_c :

$$d = \frac{4K_c^2}{\pi\sigma_0^2} \square \quad (19)$$

Эта формула совпадает с аналогичной формулой (13), полученной при рассмотрении первой задачи. С учётом (16) и (19) из уравнения (8) получим формулу для расчёта критического давления при произвольных значениях радиуса отверстия:

$$p_c = \sigma_0 \frac{16d/a}{\sqrt{J_2}}. \quad (20)$$

При уменьшении радиуса отверстия критическая величина приложенного давления, при котором на контуре отверстия образуются трещины отрыва, стремится к неограниченному значению. В действительности, это значение, очевидно, ограничено пределом прочности материала на сжатие C_0 , откуда следует, что существует критическое значение размера отверстия $a = a_c$, ниже которого трещины отрыва на контуре отверстия не образуются. Другими словами, при $a \leq a_c$ материал не чувствует присутствия концентратора напряжений. Это согласуется с современными представлениями о реальном твёрдом теле, изложенными выше.

Была проведена экспериментальная проверка возможности применения критерия конечной

трещины к оценке образования трещин отрыва при сжатии. В качестве модельного материала использовали дигидрат сульфата кальция (двухводный гипс), приготовленный из водного раствора строительного гипса. Наряду с полуводным сульфатом кальция, строительный гипс уже содержит в своём составе определённую долю двухводного сульфата кальция, который не участвует в реакции гидратации при изготовлении образцов и фактически играет роль заполнителя. Были изготовлены две партии образцов: одна из гипсового материала с высоким (более 90 %) содержанием полуводного сульфата кальция (гипс 1), вторая – из гипсового материала с низким (в пределах 60–70 %) содержанием полуводного сульфата кальция в исходном составе (гипс 2).

Образование трещин отрыва в зонах концентрации напряжений исследовали на образцах, содержащих центральные круговые отверстия различного диаметра и подверженных одноосному сжатию. Образцы представляли собой квадратные плиты размером 200x200 мм и толщиной 30–35 мм. Диаметр отверстия изменяли от 3,5 до 25 мм. На контур отверстия наносили графитовые датчики электропроводности. Регистрацию трещин отрыва осуществляли по диаграммам изменения электропроводности графитовых датчиков в процессе нагружения образца. Методика проведения эксперимента описана в работе [17].

На рис. 2, а представлены экспериментальные данные (точки) о величине нагрузки в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия в зависимости от его диаметра, полученные на образцах из гипса 1, и результаты расчёта критического давления (сплошная кривая) по формуле (20). Штриховая прямая рассчитана согласно традиционному подходу. Аналогичные результаты, полученные на образцах из гипса 2,

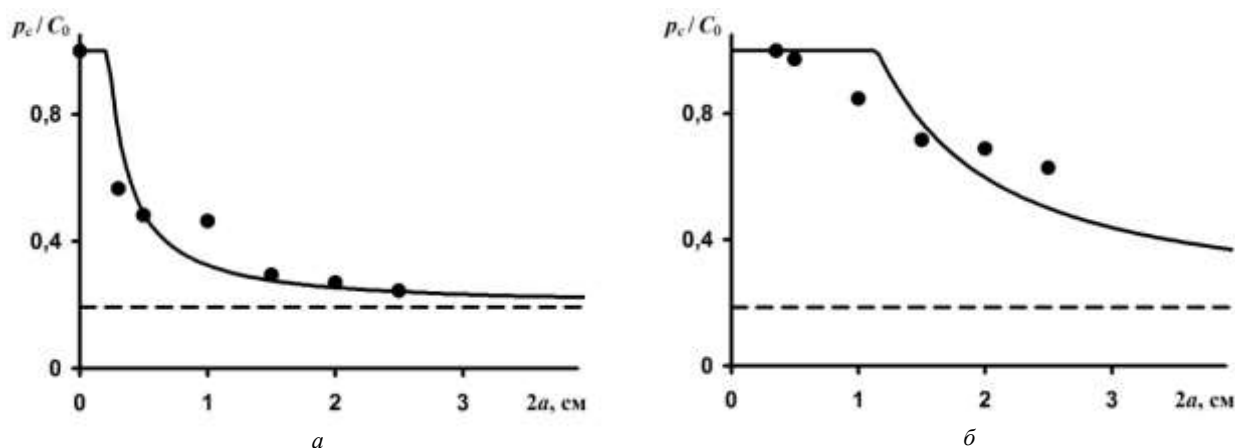


Рис. 2. Зависимость критического давления от диаметра отверстия

приведены на рис. 2, б. Рис. 2, а, б иллюстрируют существенный масштабный эффект, т.е. влияние диаметра отверстия на локальную прочность материала. С его уменьшением критическое давление возрастает, достигая предела прочности на сжатие, с увеличением – асимптотически приближается к пределу прочности на растяжение. Такое поведение качественно описывается критерием конечной трещины. Однако удовлетворительное количественное соответствие расчётных и экспериментальных значений получено только для гипса 1 (рис. 2, а). Эти результаты в целом повторяют выводы, сделанные ранее [1–3] в отношении критериев средних напряжений, напряжений в точке и фиктивной трещины.

Выводы

1. Критерий конечной трещины, также как критерии средних напряжений, напряжений в точке и фиктивной трещины, позволяет описать масштабный эффект локальной прочности материала в условиях концентрации напряжений. Критерий имеет ясное физическое содержание и не требует привлечения дополнительных допущений о существовании зоны предразрушения и перераспределении упругих напряжений в ней.

2. Использование критерия конечной трещины для оценки опасности малых технологических и эксплуатационных дефектов при растяжении может привести к существенной погрешности, поскольку задача определения критического размера дефекта при растяжении в рамках рассмотренного критерия, также как и в рамках критериев, упомянутых выше, не может быть поставлена.

3. Экспериментально показано, что для некоторых материалов критерий конечной трещины может быть успешно применён как для описания масштабного эффекта, так и для оценки критического размера дефекта при сжатии. Однако применение критерия для других материалов позволяет получить лишь качественные оценки локальной прочности.

Литература

1. Сукнёв С.В. Нелокальные критерии разрушения. Критерий средних напряжений // Наука и образование. – 2007. – № 1. – С. 28–33.
2. Сукнёв С.В. Нелокальные критерии разрушения. Критерий напряжений в точке // Наука и образование. – 2008. – № 1. – С. 27–32.
3. Сукнёв С.В. Нелокальные критерии разрушения. Критерий фиктивной трещины // Наука и образование. – 2009. – № 1. – С. 29–36.
4. Leguillon D. Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2002. – Vol. 21, No. 1. – P. 61–72.

5. Pugno N.M., Ruoff R.S. Quantized fracture mechanics // Philos. Mag. – 2004. – Vol. 84, No. 27. – P. 2829–2845.

6. Taylor D., Cornetti P., Pugno N. The fracture mechanics of finite crack extension // Eng. Fract. Mech. – 2005. – Vol. 72, No. 7. – P. 1021–1038.

7. Yavari A., Wnuk M.P. Finite Fracture Mechanics for fractal cracks // IUTAM Symposium on Scaling in Solid Mechanics. Iutam Bookseries, vol. 10. – Dordrecht: Springer, 2009. – P. 223–231.

8. Carpinteri A., Cornetti P., Sapora A. Brittle failures at rounded V-notches: a finite fracture mechanics approach // Int. J. Fract. – 2011. – Vol. 172, No. 1. – P. 1–8.

9. Sapora A., Mantič V. Finite Fracture Mechanics: a deeper investigation on negative T -stress effects // Int. J. Fract. – 2016. – Vol. 197, No. 1. – P. 111–118.

10. Weißgraeber P., Leguillon D., Becker W. A review of Finite Fracture Mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers // Arch. Appl. Mech. – 2016. – Vol. 86, No. 1–2. – P. 375–401.

11. Strobl M., Dowgiallo P., Seelig T. Analysis of Hertzian indentation fracture in the framework of finite fracture mechanics // Int. J. Fract. – 2017. – Vol. 206, No. 1. – P. 67–79.

12. Martin E., Leguillon D., Carrère N. Finite Fracture Mechanics: a useful tool to analyze cracking mechanisms in composite materials // The structural integrity of carbon fiber composites. – Cham: Springer, 2017. – P. 529–548.

13. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1984. – Т. 2. – 560 с.

14. Shaw M.C. A critical review of mechanical failure criteria // Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol. – 1984. – Vol. 106, No. 3. – P. 219–226.

15. Daniel I.M. The behavior of uniaxially loaded graphite/epoxy plates with holes // 2nd Int. Conf. on Compos. Mater. – Toronto, 1978. – P. 1019–1034.

16. Hyakutake H., Hagio T., Nisitani H. Fracture of FRP plates containing notches or a circular hole under tension // Int. J. Pressure Vessels and Piping. – 1990. – Vol. 44, No. 3. – P. 277–290.

17. Сукнёв С.В., Елишин В.К., Новопашин М.Д. Экспериментальное моделирование процессов трещинообразования в образцах горных пород с отверстием // ФТПРПИ. – 2003. – № 5. С. 47–54.

References

1. Suknyov S.V. Nelokal'nye kriterii razrusheniya. Kriterij srednih napryazhenij // Nauka i obrazovanie, 2007, № 1, pp. 28–33.
2. Suknyov S.V. Nelokal'nye kriterii razrusheniya. Kriterij napryazhenij v tochke // Nauka i obrazovanie, 2008, № 1. – S. 27–32.

3. *Suknyov S.V.* Nelokal'nye kriterii razrusheniya. Kriterij fiktivnoj treschiny // *Nauka i obrazovanie*, 2009, № 1, pp. 29–36.
4. *Leguillon D.* Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch // *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2002, vol. 21, № 1, pp. 61–72.
5. *Pugno N.M., Ruoff R.S.* Quantized fracture mechanics // *Philos. Mag.* – 2004, vol. 84, № 27, pp. 2829–2845.
6. *Taylor D., Cornetti P., Pugno N.* The fracture mechanics of finite crack extension // *Eng. Fract. Mech.*, 2005, vol. 72, № 7, pp. 1021–1038.
7. *Yavari A., Wnuk M.P.* Finite Fracture Mechanics for fractal cracks // *IUTAM Symposium on Scaling in Solid Mechanics. Iutam Bookseries*, vol. 10. – Dordrecht: Springer, 2009, pp. 223–231.
8. *Carpinteri A., Cornetti P., Sapora A.* Brittle failures at rounded V-notches: a finite fracture mechanics approach // *Int. J. Fract.* 2011, vol. 172, № 1, pp. 1–8.
9. *Sapora A., Mantič V.* Finite Fracture Mechanics: a deeper investigation on negative T -stress effects // *Int. J. Fract.*, 2016, vol. 197, № 1, pp. 111–118.
10. *Weißgraeber P., Leguillon D., Becker W.* A review of Finite Fracture Mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers // *Arch. Appl. Mech.*, 2016, vol. 86, № 1–2, pp. 375–401.
11. *Strobl M., Dowgiallo P., Seelig T.* Analysis of Hertzian indentation fracture in the framework of finite fracture mechanics // *Int. J. Fract.*, 2017, vol. 206, № 1, pp. 67–79.
12. *Martin E., Leguillon D., Carrère N.* Finite Fracture Mechanics: a useful tool to analyze cracking mechanisms in composite materials // *The structural integrity of carbon fiber composites*. Cham: Springer, 2017, pp. 529–548.
13. *Sedov L.I.* *Mekhanika sploshnoj sredy*. Moscow: Nauka, 1984, vol. 2, p. 560.
14. *Shaw M.C.* A critical review of mechanical failure criteria // *Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol.*, 1984, vol. 106, № 36 pp. 219–226.
15. *Daniel I.M.* The behavior of uniaxially loaded graphite/epoxy plates with holes // *2nd Int. Conf. on Compos. Mater. Toronto*, 1978, pp. 1019–1034.
16. *Hyakutake H., Hagio T., Nisitani H.* Fracture of FRP plates containing notches or a circular hole under tension // *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, 1990, vol. 44, № 3, pp. 277–290.
17. *Suknev S.V., Elshin V.K., Novopashin M.D.* Eksperimental'noe modelirovanie processov treschinoobrazovaniya v obrazcah gornyh porod s otverstiem // *FTPRPI*. 2003, № 5, pp. 47–54.

Поступила в редакцию 12.03.2018